УДК 539.3;612.13

К.С. АХВЕРДИЕВ, Г.В. ЧУДИНОВ, Е.В. ФОМИЧЕВ, М.К. АХВЕРДИЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ТЕЧЕНИЯ КРОВИ В КРОВЕНОСНОМ СОСУДЕ В ВИДЕ МОДЕЛИ РАЗДЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В СУЖАЮЩЕЙСЯ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБКЕ

В работе на основе модели раздельного течения двух несмешивающихся жидкостей в сужающейся конической трубке решена задача о математическом моделировании стратифицированного течения крови в кровеносном сосуде. Дана оценка влияния вязкостных отношений слоев на профили распределения скоростей и на относительный расход.

Ключевые слова: *модель, стратифицированное течение, коническая трубка, пристенчатый эффект.*

Как известно [1-3], кровь, движущаяся по кровеносным сосудам, может рассматриваться как суспензия (жидкость со взвешанными в ней частицами). Течение такой суспензии обладает такими свойствами, что в узкой зоне около стенок сосуда взвешанные частицы отсутствуют. Это явление носит название пристенчатого эффекта. При этом концентрация жидкости большой вязкости практически равна нулю у стенок сосуда и максимальна в окрестности ее оси. Таким образом, учет пристенчатого эффекта требует при изучении движения крови в кровеносных сосудах учесть слоистый характер ее движения, опираясь на уравнения Навье-Стокса.

В данной работе решается задача о стратифицированном (слоистом) течении двух несмешивающихся жидкостей в сужающейся конической трубке (рис.1).

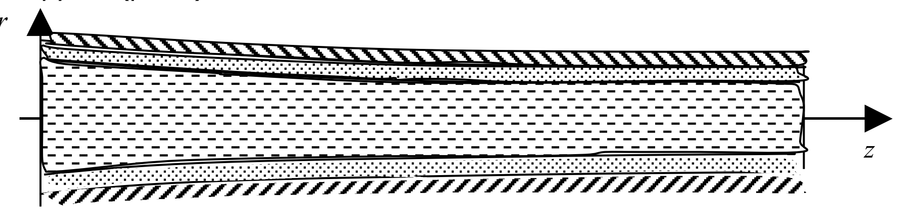


Рис.1. Схематическое изображение слоистой жидкости в конической трубке

В качестве исходных уравнений берется линейная система уравнений Навье-Стокса для случая «тонкого слоя» для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial^2 v_{z_i}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_{z_i}}{\partial r}=\frac{1}{\mu_j}\frac{\partial P_i}{\partial z},\quad \frac{\partial v_{r_i}}{\partial r}+\frac{v_{r_i}}{r}+\frac{\partial v_{z_i}}{\partial z}=0,\ (i=1,2),\qquad (1)$$

где v_{z_i}, v_{r_i} – компоненты вектора скорости; μ_i – динамический коэффициент вязкости; p_i – давление в слоях; r, z – цилиндрическая система коэффициентов.

Система уравнений (1) решается при следующих граничных условиях:

– условие прилипания жидкости к стенкам трубки;

– ограниченность функции υ_z и υ_r на оси трубки;

– на границе раздела слоев равенство нормальных и касательных напряжений и условие (стратифицирование) раздельного течения жидкости.

Входное и выходное давление считается заданными.

Введем функцию тока $\psi_i(r,z)$ по формулам:

$$r\upsilon_{r_i} = -\frac{\partial \psi_i}{\partial z},\ r\upsilon_z = \frac{\partial \psi_i}{\partial r}. \qquad (2)$$

С учетом (2) уравнения (1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\ \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\ \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_i}{\partial r} = \frac{1}{\mu_i}\frac{dp_i}{\partial z},\ (i = 1,2). \qquad (3)$$

Точное автомодельное решение задачи. Решение системы уравнений (3) будем искать в виде

$$\psi_i = \tilde{\psi}_i(\xi),\ \frac{1}{\mu_i}\frac{dp_i}{dz} = \frac{c_i}{e^{-4\alpha z}},\ \xi = \frac{r}{e^{-\alpha z}}. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\ \frac{1}{\xi}\frac{d\psi_i}{d\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\ \frac{1}{\xi}\frac{d\tilde{\psi}_i}{d\xi} = c_i (i = 1,2). \qquad (5)$$

Граничные условия при этом записываем в виде:

$$\frac{d\tilde{\psi}_2}{d\xi} = 0 \text{ при } \xi = A_2;\quad \frac{d\tilde{\psi}_1}{d\xi} = \frac{d\tilde{\psi}_2}{d\xi} \text{ при } \xi = A_1;$$

$$\mu_1\frac{d^2\tilde{\psi}_1}{d\xi^2} = \mu_2\frac{d^2\tilde{\psi}_2}{d\xi^2} \text{ при } \xi = A_1;\quad \frac{d\tilde{\psi}_1}{d\xi} = 0 \text{ при } \xi = 0. \qquad (6)$$

Здесь $r = A_2 e^{-\alpha z}$, $r = A_1 e^{-\alpha z}$ – соответственно уравнения контура стенки конической трубки и границы раздела слоев жидкости $(A_2 > A_1)$, $\alpha = const$.

Условия раздельного (стратифицированного) движения на границе раздела слоев автоматически выполняются, поскольку

$$\upsilon_{r_i}/\upsilon_{\theta_i} = -A_1 e^{-\alpha z}\alpha \text{ при } \xi = A_1,$$

поэтому на границе раздела вектор скорости направлен по касательной к контуру раздела слоев жидкостей.

Решение задачи (5)-(6) находим непосредственным интегрированием, в результате получаем:

$$\psi_1 = \frac{c_1\xi^3}{4} + c_3\xi \ln\xi + c_4\xi, \quad \psi_2 = \frac{c_2\xi^3}{4} + c_5\xi \ln\xi + c_6\xi. \qquad (7)$$

Используя граничные условия (5) для определения постоянных интегрирования, придем к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\frac{c_2 A_2^3}{4} + c_5 A_2 \ln A_2 + c_6 A_2 = 0,$$

$$c_3 = 0, \; \frac{c_1 A_1^3}{4} + c_4 A_1 = \frac{c_2 A_1^3}{4} + c_5 A_1 \ln A_1 + c_6 A_1,$$

$$\frac{3}{4} A_1^2 c_1 + c_4 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{3}{4} c_2 A_1^2 + c_5 \ln A_1 + c_5 + c_6 \right). \qquad (8)$$

Решив систему (8), получим:

$$c_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} c_2; \; c_2 = \frac{p_{вых} - p_{вх}}{\mu_2 (e^{\alpha l} - e^{\alpha z_0})};$$

$$c_3 = 0; \; c_4 = c_2 \frac{A_1^2}{4} + c_5 \ln\frac{A_1}{A_2} - c_2 \frac{A_2^2}{4} - \frac{c_1 A_1^2}{4};$$

$$c_5 = \frac{c_2 \frac{A_2^2}{4}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{A_1^2}{4} c_2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right)}{\frac{\mu_2}{\mu_1} \ln\frac{A_1}{A_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} - \ln\frac{A_1}{A_2}}; \; c_6 = -\frac{c_2 A_2^2}{4} - c_5 \ln A_2. \qquad (9)$$

Расход в любом сечении трубки определяется выражением:

$$Q = Q_1 + Q_2, \qquad (10)$$

где

$$Q_1 = \int_0^{A_1} \left(\frac{c_1}{4}\xi^3 + c_4\xi \right) d\xi = \frac{c_1 A_1^4}{16} + \frac{c_4 A_1^2}{2};$$

$$Q_2 = \int_{A_1}^{A_2} \left(\frac{c_2}{4}\xi^3 + c_5\xi \ln\xi + c_6\xi \right) d\xi = \frac{c_2}{16}\left(A_2^4 - A_1^4 \right) + c_5 \left(\frac{A_1^2}{4} - \frac{A_2^2}{4} \right) +$$

$$\frac{c_2 A_2^2}{8}\left(A_1^2 - A_2^2 \right) + c_5 \frac{A_1^2}{2} \ln\frac{A_2}{A_1}; \; A_2 > A_1.$$

С учетом формул (2) и (7) для компоненты скорости υ_z получим следующие выражения:

$$\upsilon_z^{(1)} = \frac{1}{e^{-2\alpha z}} \left(\frac{c_1\xi^2}{4} + c_4 \right), \; 0 \le \xi \le A_1;$$

$$\upsilon_z^{(2)} = \frac{1}{e^{-2\alpha z}}\left(c_2\frac{\xi^2}{4} + c_5\ln\xi + c_6\right), \quad A_1 \le \xi \le A_2. \qquad (11)$$

Из формул (11) с учетом (9) будем иметь:

$$\frac{\upsilon_z^{(1)}}{\upsilon_z^{(1)}\big|_{\xi=0}} = \frac{c_1\frac{\xi^2}{4} + c_4}{c_4} = \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\xi^2}{4} + \frac{A_1^2}{4} - \frac{A_2^2}{4} - \frac{A_1^2}{4}\frac{\mu_2}{\mu_1} + \Delta\ln\frac{A_1}{A_2}}{\frac{A_1^2}{4} - \frac{A_2^2}{4} - \frac{A_1^2}{4}\frac{\mu_2}{\mu_1} + \Delta\ln\frac{A_1}{A_2}}, \quad 0 \le \xi \le A_1;$$

$$\frac{\upsilon_z^{(2)}}{\upsilon_z^{(1)}\big|_{\xi=0}} = \frac{c_2\frac{\xi^2}{4} + c_5\ln\xi + c_6}{c_4} = \frac{\frac{\xi^2}{4} - \frac{A_2^2}{4} + \Delta\ln\frac{\xi}{A_2}}{\frac{A_1^2}{4} - \frac{A_2^2}{4} - \frac{A_1^2}{4}\frac{\mu_2}{\mu_1} + \Delta\ln\frac{A_1}{A_2}}, \quad A_1 \le \xi \le A_2, \qquad (12)$$

где $\Delta = \dfrac{\frac{A_2^2}{4}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu}\right) + \frac{A_1^2}{4}\left(\frac{\mu_2}{\mu} - 1\right)}{\frac{\mu_2}{\mu_1}\ln\frac{A_1}{A_2} + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right)\ln\frac{A_1}{A_2}}$.

Из зависимостей, приведенных на рис.2, следует, что чем меньше вязкость слоя жидкости, прилегающая к стенкам сосуда, тем более максимальное значение относительной осевой составляющей скорости этого слоя.

С учетом формул (11) для относительного значения расхода $\tilde{Q} = \left(Q_1 + Q_2\right)/Q_1$ получим следующее выражение:

$$\tilde{Q} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{\frac{A_1^4}{16}\frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{A_1^2}{2}\left(\frac{A_1^2}{4} + \Delta\ln\frac{A_1}{A_2} - \frac{A_2^2}{4}\right) - \frac{A_1^2}{8}\frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{A_2^4 - A_1^4}{16} + \Delta\left(\frac{A_1^2}{4} - \frac{A_2^2}{4} + \frac{A_1^2}{2}\ln\frac{A_2}{A_1}\right) + \frac{A_2^2}{8}\left(A_1^2 - A_2^2\right)}. \qquad (13)$$

Значения относительного расхода Q при различных значениях отношения вязкости слоев и от отношения протяженности слоев

A_2/A_1	μ_2/μ_1	$1 + \frac{Q_2}{Q_1} = \tilde{Q}$
1/8	1/2	1,658
1/4	1/2	1,771
1/3	1/2	1,875
1/8	1/3	1,6379
1/4	1/3	1,718
1/3	1/3	1,78
1/8	1/4	1,632
1/4	1/4	1,705
1/3	1/4	1,761

Из зависимостей, приведенных в таблице, следует, что чем меньше μ_2 / μ_1, тем меньше относительное значение расхода $\overset{\square}{Q}$. При этом с увеличением толщины пристенчатого слоя относительное значение расхода $\overset{\square}{Q}$ резко возрастает. Как и следовало ожидать, при $\mu_2 = \mu_1$ в предельном случае $A_1 \to 0,\ Q_1 \to 0,\ Q \to 1.$

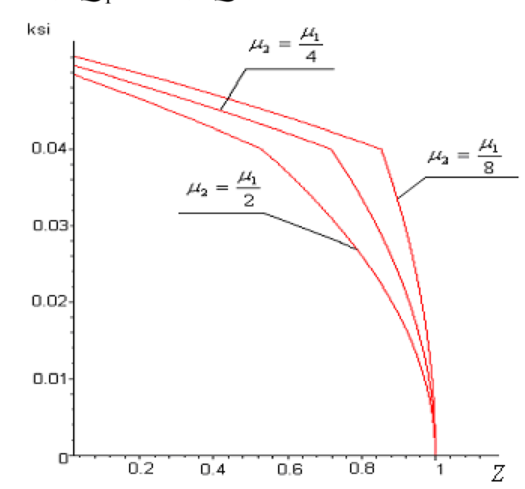


Рис. 2. Эпюра распределения относительной осевой составляющей скорости $\left(A_1 = 0{,}03\text{см},\ \ A_2 - A_1 = 0{,}04\,\text{см} \right)$

Библиографический список

1. *Каро К.* Механика кровообращения / К.Каро, Т.Педли, Р.Шротер, У.Сид. – М.: Мир, 1981. - С.179-187.

2. *Cavalcanti S.* Hemodynamics of an artery with midl stenosis // J. Biomech. – 1995. – 28. – №4. – P.387-399.

3. *Pedley T.J.* The fluid mechanics of large blood vessels. – London: Cambridge University Press, 1980. – 540 p.

Материал поступил в редакцию 08.07.08.

K.S. AKHVERDIEV, J.V. CHUDINOV, E.V. FOMICHEV, M.K. AKHERDIEVA

MATHEMATICAL MODELING OF STRATIFIED CURRENT OF BLOOD IN ABLOODVESSEL IN THE FORM OF A MODEL OF SEPARATE CURRENT OF TWO UNMIXED LIQUIDS IN A NARROWING CONIC TUBE

The problem of mathematical modelling of stratified blood current in a blood vessel has been soled in the paper on the basis of a model of separated current of two inmixed liquids in a narrowing conic tube. The influence of viscidity relations of strata on the types of speed distribution and relative expenses nave been evaluated.

АХВЕРДИЕВ Камил Самедович (р.1938), заведующий кафедрой «Высшая математика-2» Ростовского государственного университета путей сообщения, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ. Окончил Азербайджанский государственный университет (1962).
Научные интересы: гидродинамическая теория смазки.
Имеет 350 научных работ.

ЧУДИНОВ Георгий Викторович (р.1965), доктор медицинских наук Ростовской областной клинической больницы (РОКБ) сердечно-сосудистой хирургии, кардиохирург.
Автор более 100 научных работ.

ФОМИЧЕВ Евгений Викторович (р.1977), сердечно-сосудистый хирург Ростовской областной клинической больницы (РОКБ).
Имеет более 200 научных работ.

АХВЕРДИЕВА Милана Камиловна, кандидат медицинских наук Ростовского государственного медицинского университета (РГМУ).
Область научных интересов: кардиология.
Имеет более 100 научных работ.